

# 纠缠源的产生和应用

廖荣 PB21071406

2024 年 5 月 13 日

## 1 实验目的

1. 了解量子叠加态和纠缠态的基本原理和性质, 理解 Bell 不等式和 CHSH 不等式;
2. 了解基于准相位匹配 PPKTP 晶体产生纠缠光子对的原理, 学习操作和使用量子光学实验中的基本器件; 简要了解光纤传输和耦合的理论和技术和单光子测量技术;
3. 学习光子纠缠对比度的符合测量方法, 并实验验证 Bell 不等式;
4. 观测纠缠态的量子特性, 并体会其与经典物理现象的区别.

## 2 实验原理

### 2.1 量子比特

量子比特与经典比特的最大区别在于量子比特可以处在逻辑 0 和逻辑 1 的任意相干叠加态上。以光子的水平偏振  $|H\rangle$  和垂直偏振  $|V\rangle$  基为例, 一个叠加态可以表示为

$$|\phi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$$

除了测量上的概率性, 叠加态还有更重要的相干性。利用相干性可以进行量子计算、量子隐形传态的应用。

### 2.2 纠缠态

当一个体系包含两个量子比特的时候, 可以用直积态描述体系的状态, 例如  $|HV\rangle_{AB}$ 。纠缠态则可以表示为

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle_{AB} - |VH\rangle_{AB})$$

它们均可以用 HV 和 VH 的符合计数远大于 HH 和 VV 的符合计数分辨, 但是区分纠缠态和直积态的根本在于相干性。考虑  $\pm 45^\circ$  基, 记为  $|+\rangle$  和  $|-\rangle$ , 将两个态分别展开得到

$$|HV\rangle_{AB} = \frac{1}{2}(|+\rangle_A|+\rangle_B + |-\rangle_A|+\rangle_B - |+\rangle_A|-\rangle_B - |-\rangle_A|-\rangle_B)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle_A|+\rangle_B - |+\rangle_A|-\rangle_B)$$

可以看出在两个  $\pm 45^\circ$  基的直积态下, 直积态和纠缠态的符合计数是不同的, 以此可以作为两种态的区分。

从上面的例子可以看出, 在特定的测量基矢下, 处于纠缠态的两个粒子能够展现出关联性质, 这种性质是一种非经典关联。实验上可以用极化关联曲线来描述纠缠双方用不同的基矢测量所反应出来的关联性

质。具体做法是，Alice 和 Bob 其中一方固定测量一个极化方向，而另一方测量 0 到 360° 各个值的符合计数，从而画出一条曲线。

### 2.3 Bell 不等式和 CHSH 不等式

对于一个量子比特，总是可以构造泡利矩阵和一个归一化向量的内积  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z$ ，它的特征值是  $\pm 1$ ，两个本征态即为一对正交基矢。假设存在隐变量  $\lambda$ ，则两粒子系统的测量结果的期望为

$$E(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \int \rho(\lambda) E(\mathbf{e}_1, \lambda) E(\mathbf{e}_2, \lambda) d\lambda$$

对 CHSH 不等式，设  $A_1$  表示  $\mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ， $A_2, B_1, B_2$  定义同理，它们四个的取值都为  $\pm 1$ 。考虑

$$B_{CHSH} = A_1 \otimes (B_1 + B_2) + A_2 \otimes (B_1 - B_2)$$

隐变量理论下，对每个单次测量， $B_{CHSH} = \pm 2$ ，即

$$|E(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + E(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) + E(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) - E(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)| \leq 2$$

观测到违背即可说明量子力学理论的正确性。实验中可以测得 CHSH 不等式左侧极大值为  $2\sqrt{2}$

### 2.4 PPKTP 准相位匹配和纠缠光子对的制备

本实验中，主要利用一种二阶非线性效应产生纠缠光子对。在该过程中，入射的光子会自发劈裂成两个沿与入射光子同方向传输，频率相同的低能量光子，分别称为信号光和闲频光。该过程称为共线且简并的 2 型自发参量下转换过程。

由于干涉效应，随着晶体长度增加，出射光强会随晶体长度发生震荡。为了使得非线性晶体能够出射强度较高的光，需要进行准相位匹配，做法是周期性地改变非线性晶体的取向，在信号光达到最强即将下降时，改变非线性极化率的符号，从而使得信号光光强继续增长。

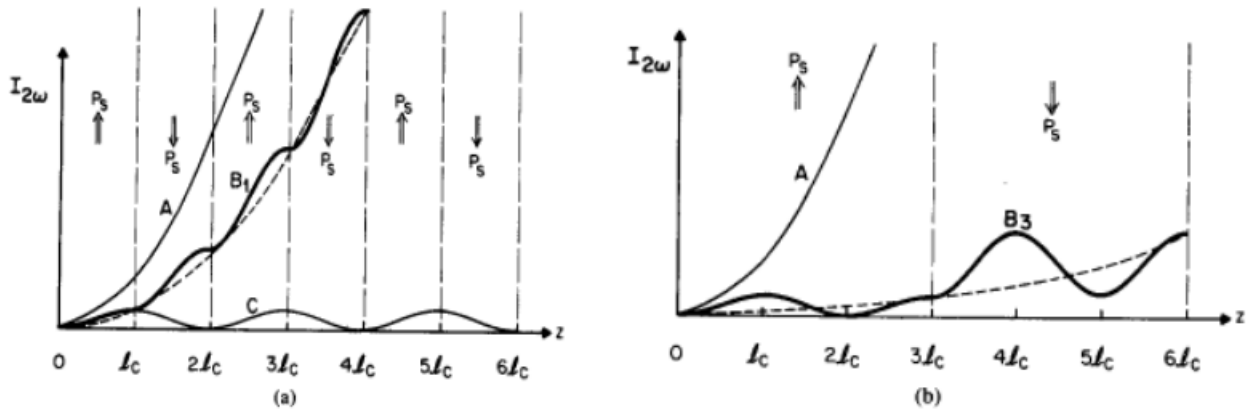


Figure 1: 相位失配 (C)、相位匹配 (A) 和准相位匹配 (B)

本实验系统利用准相位匹配晶体 PPKTP 结合 Sagnac 干涉仪。如图

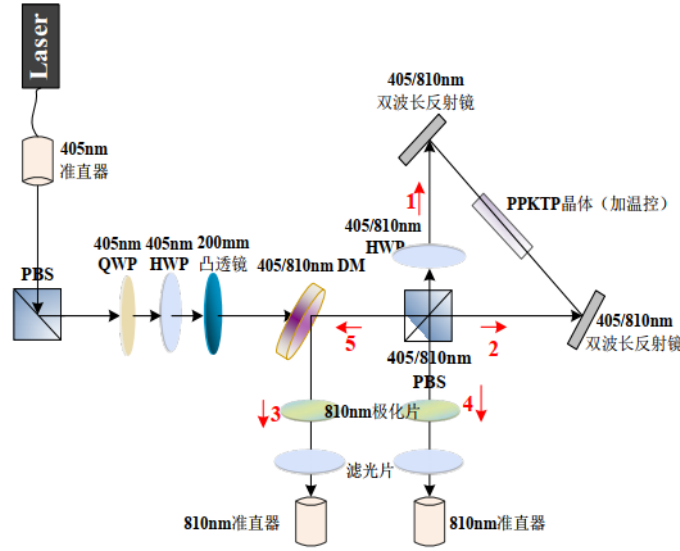


Figure 2: 实验装置

在 3 和 4 路径上, 可以获得双光子纠缠态  $|\Psi^+\rangle_{34} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V_s\rangle_3|H_i\rangle_4 + |H_s\rangle_3|V_i\rangle_4)$ .

### 3 数据处理与分析

#### 3.1 CHSH 不等式验证

对任意的 C, 有

$$\delta C = \sqrt{C}$$

为方便起见, 记  $x = C(\theta_{ai}, \theta_{bj}), y = C(\theta_{ai}^\perp, \theta_{bj}^\perp), z = C(\theta_{ai}, \theta_{bj}^\perp), t = C(\theta_{ai}^\perp, \theta_{bj})$ 。由不确定度传递公式, 相对不确定度为

$$\begin{aligned} \frac{\delta E(a_i, b_j)}{E(a_i, b_j)} &= \frac{x + y + z + t}{x + y - z - t} \cdot \frac{(x + y + z + t) + (x + y - z - t)}{(x + y + z + t)^2} (\delta x + \delta y + \delta z + \delta t) \\ &= \frac{2(x + y)}{(x + y + z + t)(x + y - z - t)} (\delta x + \delta y + \delta z + \delta t) \end{aligned}$$

最终不等式结果的不确定度

$$\Delta = \sum \delta E(a_i, b_j)$$

代入数据可以得到

$$\delta E(a_1, b_1) = 0.0984$$

$$\delta E(a_1, b_2) = 0.0119$$

$$\delta E(a_2, b_2) = 0.0263$$

$$\delta E(a_2, b_1) = 0.0183$$

$$\Delta = 0.1549$$

故测量结果为

$$|E(a_1, b_1) + E(a_1, b_2) + E(a_2, b_2) - E(a_2, b_1)| = 2.6904 \pm 0.1549$$

$3\sigma$  下限为  $2.6904 - 0.1549 \times 3 = 2.2257 > 2$ , 可以认为显著偏离 CHSH 不等式。

### 3.2 关联曲线

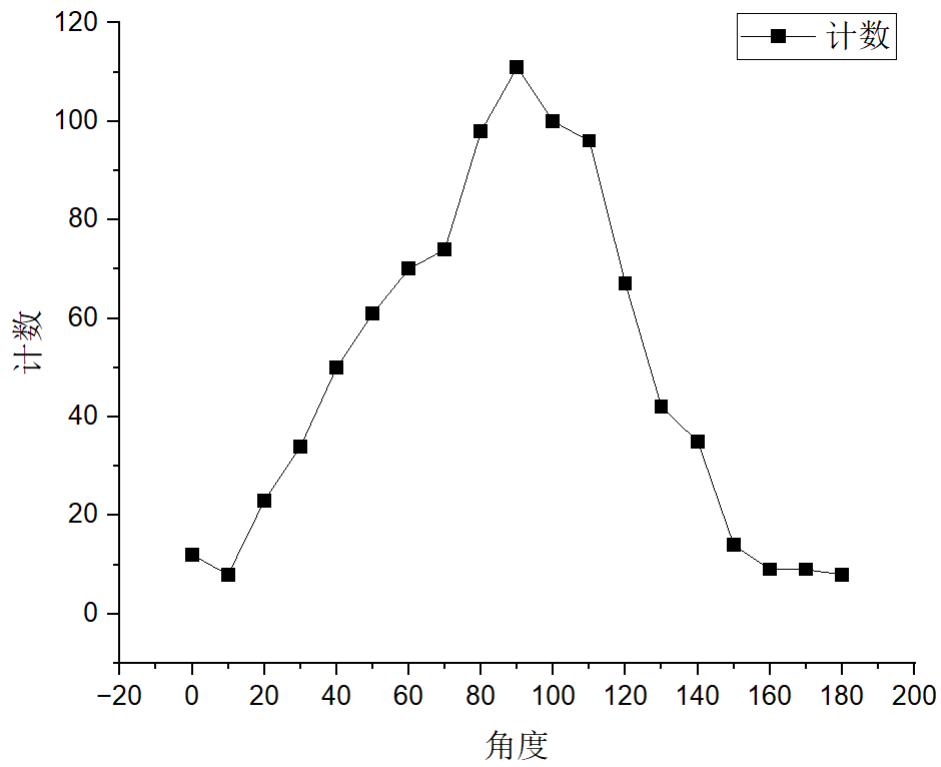


Figure 3: 0° 关联曲线

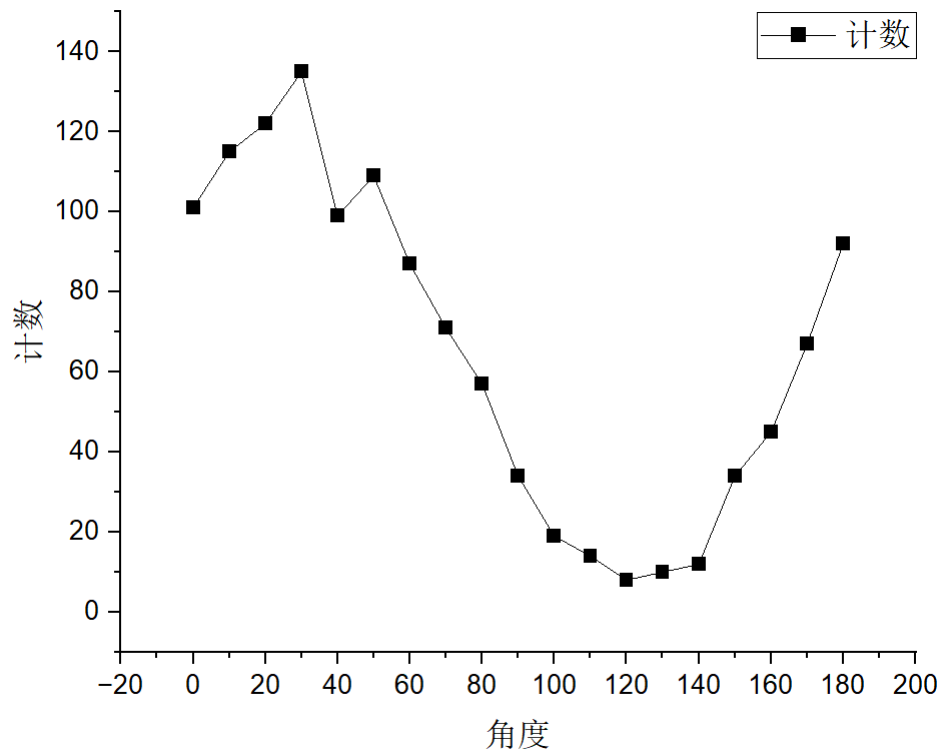


Figure 4: 45° 关联曲线

## 4 思考题

### 4.1

先构造出与  $|H\rangle, |V\rangle$  基相差  $\theta$  角度的基。HV 表象下，不妨设对应本征值 +1 的基为  $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ ，对应本征值-1 的基为  $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ 。则构造的  $\mathbf{n}$  应该满足

$$\begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

容易解得

$$\begin{aligned} n_z &= \cos 2\theta \\ n_y &= 0 \\ n_x &= \sin 2\theta \end{aligned}$$

即  $\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  在 HV 表象下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

故

$$\mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) &= \langle \Psi^+ | \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} | \Psi^+ \rangle \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

同理可得  $E(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) = E(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $E(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 因此  $B_{CHSH} = 2\sqrt{2}$

## 4.2

首先，由关联曲线可以看出，当两个接收器偏振方向正交的时候获得最大的符合计数，说明必为  $|\Psi\rangle$  态。

并且， $E(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)$  为正数，且与其他关联系数符号相反，经过验算可以知道本实验制备的基为  $|\Psi^-\rangle$

## 4.3

保证入射到 Sagnac 环内的光具有  $45^\circ$  偏振，使得经过 Sagnac 环的 PBS 之后两路光子数为 1:1，以此确保制备出正确的 Bell 态。

## 4.4

设 b 接收器测量的态为  $|\psi\rangle$ ，与  $|H\rangle$  夹角为  $\theta$ ，与其正交的另一个基矢记为  $|\psi^\perp\rangle$ ，则对于 HV 情况，有

$$\begin{aligned}\langle H\psi|HV\rangle &= \langle H\psi|H\rangle(\sin\theta|\psi\rangle + \cos\theta|\psi^\perp\rangle) \\ &= \sin\theta\end{aligned}$$

对于 VH 情况，则

$$\begin{aligned}\langle V\psi|VH\rangle &= \langle V\psi|V\rangle(\cos\theta|\psi\rangle - \sin\theta|\psi^\perp\rangle) \\ &= \cos\theta\end{aligned}$$

它们的概率混合为

$$\begin{aligned}p &= \frac{1}{2}|\langle H\psi|HV\rangle|^2 + \frac{1}{2}|\langle V\psi|VH\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

故关联曲线是一条直线。

设  $\mathbf{a}_i \cdot \sigma$  对应的基与 HV 基夹角为  $\alpha_i$ ， $\mathbf{b}_j \cdot \sigma$  对应的基与 HV 基夹角为  $\beta_j$ ，可以得到

$$\begin{aligned}E(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) &= \frac{1}{2} \left( \langle HV| \begin{pmatrix} \cos 2\alpha_i & \sin 2\alpha_i \\ \sin 2\alpha_i & \cos 2\alpha_i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos 2\beta_j & \sin 2\beta_j \\ \sin 2\beta_j & \cos 2\beta_j \end{pmatrix} |HV\rangle + \right. \\ &\quad \left. \langle VH| \begin{pmatrix} \cos 2\alpha_i & \sin 2\alpha_i \\ \sin 2\alpha_i & \cos 2\alpha_i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos 2\beta_j & \sin 2\beta_j \\ \sin 2\beta_j & \cos 2\beta_j \end{pmatrix} |VH\rangle \right) \\ &= \cos 2\alpha_i \cos 2\beta_j\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}& |E(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + E(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) + E(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) - E(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)| \\ &= |\cos 2\alpha_1(\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2) + \cos 2\alpha_2(\cos 2\beta_1 - \cos 2\beta_2)| \\ &\leq 2\end{aligned}$$

CHSH 不等式得到满足。

本实验中，Sagnac 环的作用便在于制作出真正的纠缠态，而不是 HV、VH 的混态即概率叠加，以此保证正确测量出关联曲线以及 CHSH 不等式的违背。